

SU ALCUNI RISULTATI RELATIVI
AL TEST DI KRUSKAL-WALLIS



giuffrè editore - 1996

Estratto dal volume:

STUDI IN ONORE DI
GIAMPIERO LANDENA

SU ALCUNI RISULTATI RELATIVI AL TEST DI KRUSKALL-WALLIS

GIORGIO VITTADINI

1. Introduzione

Nel caso non parametrico per verificare l'ipotesi di uguaglianza fra mediane in s popolazioni mediante s campioni bernoulliani di ampiezza $n_1, n_2, \dots, n_s$, dopo aver attribuito i rispettivi ranghi all'insieme degli $n = \sum_{i=1}^s n_i$ risultati ottenuti, viene usualmente adottato il test g di Kruskall-Wallis (1952). La corrispondente v.c. (variabile casuale) G al divergere dell'ampiezza campionaria converge in legge alla v.c. χ^2 . Negli altri casi la sua distribuzione è ignota e ricavabile con difficoltà anche mediante elaboratore elettronico per problemi di costo e tempo. D'altra parte le tavole predisposte da Kruskall-Wallis (1952) e Kraft e van Eeden (1968) sono limitate a casi molto particolari, in quanto valgono solo per $s = 3$ e n_1, n_2, n_3 non superiori a 5.

In questo lavoro, dopo aver mostrato quale sia il valore minimo della statistica test g , si propone un metodo per ricavare con semplicità le determinazioni di G e le corrispondenti probabilità nel caso in cui gli s campioni abbiano ampiezza identica. Secondariamente, osservando che il test di Kruskall-Wallis non è monotono e la sua distribuzione desta, in alcuni casi, perplessità a riguardo della sua effettiva capacità di permettere la verifica di ipotesi sull'uguaglianza di mediane, si propone un nuovo test che sembra ovviare ai problemi sollevati.

2. Il test di Kruskall-Wallis

Attribuiti i ranghi r_{ij} da 1 a n al complesso degli $n = \sum_{i=1}^s n_i$ risultati conseguiti con gli s campioni, si calcolano le medie:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} \quad (i = 1, \dots, s) \quad (2.1)$$

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i \bar{r}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} = \frac{(n+1)}{2} \quad (2.2)$$

Al fine di verificare l'ipotesi di uguaglianza fra mediane, il test di Kruskal-Wallis si basa sulla seguente funzione:

$$g = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^s n_i [\bar{r}_i - \bar{r}]^2 = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^s n_i \left[\bar{r}_i - \frac{n+1}{2} \right]^2 \quad (2.3)$$

Se le medie dei ranghi sono tutte uguali fra loro e alla media generale (2.2), g assume il suo valore minimo pari a $g_{\text{MIN}} = 0$, mentre quando gli n_i ranghi relativi a ciascun campione sono numeri consecutivi assume il suo valore massimo pari a:

$$g_{\text{MAX}} = \frac{\sum_{i=1}^s n_i^3 - \frac{n^3}{s}}{n(n+1)} \quad (2.4)$$

Perciò, se vale H_0 , le s medie non dovrebbero differire di molto fra loro e dalla media generale. Conseguentemente g dovrebbe assumere o valore pari o valori prossimi allo zero in modo tale da accettare l'ipotesi H_0 . Identificato, quindi, il valore g soluzione dell'equazione $P(G \geq g_\alpha) = \alpha$, essendo G la v.c. di Kruskal-Wallis descritta sotto H_0 da g ed α il prefissato livello di significatività, si accetta o si rifiuta H_0 a seconda che sia $g < g_\alpha$ oppure $g \geq g_\alpha$. Si dimostra che la v.c. G

(per $n_i \rightarrow \infty$ e $\frac{n_i}{n} = w_i$ con $(0 < w_i < 1)$) converge in legge alla v.c. χ^2 con $(s-1)$ gradi di libertà. Di conseguenza, se gli n_i sono sufficientemente elevati, G può ritenersi in via approssimata determinazione della v.c. χ^2 per cui la verifica di H_0 in alternativa ad H_1 può realizzarsi accettando H_0 se $g < \chi_\alpha^2$ e rifiutando H_0 se $g \geq \chi_\alpha^2$, dove χ_α^2 è la soluzione dell'equazione $P(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$.

3. Un metodo per ricavare intensità e probabilità della v.c. di Kruskal-Wallis

Per ciò che concerne la distribuzione della v.c. G di Kruskal-Wallis oltre a quanto accennato nel paragrafo precedente nella lette-

ratura è ricordato solo che il suo andamento è prima crescente e poi decrescente, asimmetrico e caratterizzato da numerosi valori modal, ma, in accordo con la premessa, è difficilmente ricavabile.

Si mostra innanzitutto che il valore minimo delle v.c. G non è sempre zero. Nel caso in cui n sia pari, se almeno un campione è di ampiezza n_i dispari, è impossibile che la corrispondente media $\bar{r}_i$ sia uguale alla media generale $\bar{r}$.

Infatti dall'eventuale uguaglianza $\bar{r}_i = \bar{r} = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$ segue anche $n_i \bar{r}_i = n_i \bar{r}$ ma ciò non è possibile perché $n_i \bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$ è sempre intero, mentre $n_i \bar{r} = n_i \frac{n+1}{2}$ con n pari è un numero frazionario.

Nella predetta situazione, cioè quando n è pari e qualche n_i è dispari, potendosi riscrivere la statistica (2.3) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} g &= \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^s \left(\frac{n_i \bar{r}_i - n_i \left(\frac{n+1}{2} \right)}{n_i} \right)^2 n_i = \\ &= \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^s \left(n_i \bar{r}_i - n_i \frac{n+1}{2} \right)^2 \frac{1}{n_i} \end{aligned} \quad (3.1)$$

il valore minimo g_{MIN} di G risulta:

$$g_{\text{MIN}} = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^d \frac{0.5^2}{n_i} \quad (3.2)$$

essendo d il numero di campioni con numerosità dispari.

In tutti gli altri casi, cioè se la numerosità n_i di tutti i campioni è pari, si ha $g_{\text{MIN}} = 0$.

Ciò premesso, è possibile definire un semplice criterio attraverso cui calcolare i valori di $\bar{r}_i$ che portano alle diverse determinazioni di G senza dover ottenere i valori di ogni singolo rango r_{ij} . Innanzitutto si ricavano i valori dei diversi $\bar{r}_i$ tali che $G = g_{\text{MAX}}$, sapendo che in tal caso i ranghi relativi a ciascun campione sono numeri consecutivi

per cui $n_1 \bar{r}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} i$, $n_2 \bar{r}_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} i$, ..., $n_s \bar{r}_s = \sum_{i=n_1+\dots+n_{s-1}}^{n_1+\dots+n_s} i$. Fisso restando $\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij} = \frac{n(n+1)}{2}$, si incrementa di 1 la quantità $n_1 \bar{r}_1$ e si decrementa

di $1, n_2, \dots$; si ottiene così il nuovo insieme di s valori: $(n_1, \bar{r}_1 + 1), (n_2, \bar{r}_2 - 1), n_3, \bar{r}_3, \dots, n_1, \bar{r}_1$ che dà vita mediante la (2.3) al nuovo valore $g_{\text{MAX}-1}$ di G . Si prosegue effettuando la stessa operazione su ogni coppia di valori $n_i, \bar{r}_i$ relativi a g_{MAX} (senza mai superare il valore massimo $n_i, \bar{r}_i$ compatibile con le ampiezze campionarie $n_1, n_2, \dots, n_s$).

Terminate le operazioni sugli $n_i, \bar{r}_i$ relativi a g_{MAX} si prosegue in questo modo sui valori che danno vita a $g_{\text{MAX}-1}, g_{\text{MAX}-2}, \dots$ fino ad ottenere tutti i valori di G utilizzando solo le medie $\bar{r}_i$ ($i = 1, \dots, s$).

Per quanto riguarda la corrispondente legge di distribuzione è possibile ricavare una funzione che approssima pressoché perfettamente le probabilità retrocumulate di G .

Se P_g è la probabilità retrocumulata relativa al prefissato valore g di G , quella approssimata ha la seguente struttura:

$$P_g^* = e^{a+bg_1+cg_1^2+dg_1} \cdot \text{sen } g_1 \quad (3.3)$$

dove a, b, c, d sono opportune costanti da determinare di volta in volta.

Nella Tabella 1 sono mostrati i risultati ottenuti per tutti i casi tabulati da van Eeden e Kruskal-Wallis e in numerosi altri.

Per ogni n_i, n, s i coefficienti di correlazione lineare che in essa figurano vengono intesi come misura dell'approssimazione esistente tra le probabilità retrocumulate di G e le probabilità retrocumulate approssimate definite con la (3.3) corrispondenti a identiche determinazioni g di G . Non essendo tali coefficienti mai inferiori a 0.99 si conclude che la stessa (3.3) approssima pressoché, perfettamente le probabilità retrocumulate della v.c. G . Nel caso in cui le numerosità campionarie n_i siano identiche, i valori dei parametri a, b, c, d sono facilmente ricavabili in funzione di n_i, n, s .

Si ricordi innanzitutto che il calcolo della determinazione g della v.c. G mediante la (2.3) si può effettuare prendendo in considerazione solo le permutazioni indipendenti, vale a dire quelle in cui l'ordinamento dei ranghi di un singolo campione è sempre crescente (o decrescente) e in cui è indifferente l'ordine in cui si presentano i singoli campioni. In questo senso, dato il numero delle permutazioni indipendenti, tra loro equiprobabili:

$$n_{pi}(n) = \frac{n!}{s \prod_{i=1}^s n_i! v_i!} \quad (3.4)$$

ove v è il numero di campioni di uguale numerosità, nel caso di n_i identici si ha:

$$n_{pi}(n_s) = \frac{n!}{(n_i!)^s s!} \quad (3.5)$$

Per ciò che concerne la probabilità associata a g_{MAX} si osserva che esiste una sola permutazione indipendente tale da ottenere la determinazione g_{MAX} , quella in cui i ranghi relativi a ciascun campione sono numeri consecutivi. Si ha cioè:

$$P_{g_{\text{MAX}}} = \frac{1}{n_{pi}(n_s)} \quad (3.6)$$

Per ottenere il valore $g_{\text{MAX}-1}$ immediatamente inferiore a g_{MAX} è necessario effettuare la permutazione delle coppie di ranghi adiacenti appartenenti a campioni distinti. Tale permutazione provoca la variazione minima possibile nella somma dei quadrati dei valori $n_i, \bar{r}_i$ utilizzati nella (2.3), in quanto si riduce all'incremento di una unità di $n_i, \bar{r}_i$ e al decremento di una unità di $n_i, \bar{r}_{i+1}$. La differenza tra i quadrati dei valori $n_i, \bar{r}_i$ e $n_i, \bar{r}_{i+1}$ e $(n_i, \bar{r}_{i+1} - 1)$ è data da:

$$(n_i, \bar{r}_i)^2 + (n_i, \bar{r}_{i+1})^2 - (n_i, \bar{r}_i - 1)^2 - (n_i, \bar{r}_{i+1} - 1)^2 = 2 [n_i(\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i) - 1] \quad (3.7)$$

Poiché, se gli n_i sono tutti uguali, nell'ordinamento relativo a g_{MAX} le differenze fra $\bar{r}_{i+1}$ e $\bar{r}_i$ relative a coppie di campioni con ranghi adiacenti sono costanti, anche l'effetto (3.7) della permutazione descritta è costante, qualunque sia la coppia di campioni con ranghi adiacenti prescelti. Se ne deduce che:

$$g_{\text{MAX}-1} = g_{\text{MAX}} - \frac{12}{n(n+1)} \cdot \frac{2}{n_i} [n_i(\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i) - 1] \quad (3.8)$$

e che la probabilità associata a $g_{\text{MAX}-1}$ è quindi:

$$P_{g_{\text{MAX}-1}} = \frac{s-1}{n_{pi}(n_s)} \quad (3.9)$$

pari al numero possibile di permutazioni tra coppie di ranghi adiacenti appartenenti a campioni distinti in un insieme di s campioni.

Si consideri, ad esempio, il caso in cui $n = 10$ con $s = 5$ e con campioni di ampiezza $n_i = 2$. L'ordinamento relativo a g_{MAX} è:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ n_{\bar{r}_i} & 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \end{array}$$

Si osserva che le differenze fra $n_{\bar{r}_{i+1}} - n_{\bar{r}_i} = 4$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sono costanti e sono possibili $s - 1 = 4$ permutazioni tra le coppie di ranghi adiacenti (2 e 3, 4 e 5, 6 e 7, 8 e 9) che comportano un medesimo cambiamento del valore di $n_{\bar{r}_i}$ e $n_{\bar{r}_{i+1}}$. In accordo con la (3.8) e la (3.9) il valore di $g_{\text{MAX}-1}$ è pari a $\left(\frac{960}{110} - \frac{36}{110}\right) = \frac{924}{110}$ con probabilità $\frac{4}{10!} = \frac{4}{945}$.

(21)551

Procedendo in modo analogo a partire dagli ordinamenti di ranghi relativi a $g_{\text{MAX}-1}$ si possono ottenere i valori di $g_{\text{MAX}-2}$ permutando le coppie di ranghi adiacenti appartenenti a campioni distinti. Si osserva che, data la permutazione ottenuta passando dagli ordinamenti relativi a g_{MAX} e $g_{\text{MAX}-1}$, per ogni coppia di colonne con ranghi adiacenti si possono effettuare due permutazioni di coppie di ranghi adiacenti (eccetto che nel caso di $n_i = 2$ ove si può effettuare una sola permutazione).

Ai fini del calcolo di g le permutazioni effettuate portano alle seguenti differenze:

$$\begin{aligned} g_{\text{MAX}-2} &= g_{\text{MAX}-1} - \frac{12}{n(n+1)n_i} [(n_{\bar{r}_i} + 1)^2 + (n_{\bar{r}_{i+1}} - 1)^2 - (n_{\bar{r}_i} + 2)^2 - \\ &\quad - (n_{\bar{r}_i} - 2)^2] = \frac{12}{n(n+1)} \frac{2}{n_i} [n_i(\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i) - 3] \end{aligned} \quad (3.10)$$

con probabilità:

$$p_{g_{\text{MAX}-2}} = \frac{2(s-1)}{n_{pi}(n_i s)} \quad (n_i > 2); \quad (3.11)$$

$$p_{g_{\text{MAX}-2}} = \frac{s-1}{n_{ni}(n_i s)} \quad (n_i = 2), \quad (3.12)$$

Quindi, calcolando le P retrocumulate dalle (3.6), (3.8), (3.11), (3.12) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{pi}(n_i s)} &= e^{a+b g_{\text{MAX}} + c g_{\text{MAX}}^2 + d g_{\text{MAX}} \text{sen } g_{\text{MAX}}} \\ \frac{1}{n_{pi}(n_i s)} &= e^{a+b g_{\text{MAX}-1} + c g_{\text{MAX}-1}^2 + d g_{\text{MAX}-1} \text{sen } g_{\text{MAX}-1}} \\ \frac{3s-2}{n_{pi}(n_i s)} &= e^{a+b g_{\text{MAX}-2} + c g_{\text{MAX}-2}^2 + d g_{\text{MAX}-2} \text{sen } g_{\text{MAX}-2}} \\ 1 &= e^{a+b g_{\text{MIN}} + c g_{\text{MIN}}^2 + d g_{\text{MIN}} \text{sen } g_{\text{MIN}}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

(se $n_i = 2$ nella terza riga si somma la (3.12) in luogo della (3.11) a (3.10) e (3.9)).

Nella tabella 2 sono riportati i valori $g_{\text{MAX}-1}$ e $g_{\text{MAX}-2}$ forniti dalle formule (3.8) e (3.10) e le corrispondenti probabilità effettive secondo le (3.9) e (3.11) per i primi 21 casi riportati nella Tabella 1.

4. Un test alternativo al test di Kruskal-Wallis

Come si è già precisato, il test di Kruskal-Wallis non è monotono secondo la definizione di G , cioè all'aumentare dell'ampiezza campionaria non è detto che g aumenti.

Inoltre, il test medesimo desta alcune perplessità quale indicatore della uguaglianza o differenza fra medie nei singoli gruppi nel caso in cui le osservazioni siano sostituite da ranghi se solo lo si confronta con l'usuale indice $\eta^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$ dato dal rapporto fra la varianza spiegata e la varianza totale che misura, per l'appunto, l'uguaglianza o meno tra medie.

Nel caso in esame si ha:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} (r_{ij} - \bar{r})^2 = \frac{\eta^2 - 1}{12}; \quad (4.1)$$

e

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i (\bar{r}_i - \bar{r})^2 = \frac{n+1}{12} g \quad (4.2)$$

mentre la varianza residua risulta:

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} (r_{ij} - \bar{r}_i)^2 \quad (4.3)$$

Dalle (4.1) e (4.2) discende che g è funzione univoca dell'indice η^2 in quanto:

$$\eta^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\frac{n+1}{12} \frac{g}{n^2-1}}{\frac{g}{n-1}} = \frac{g}{12} \quad (4.4)$$

e perciò:

$$g = (n-1) \eta^2 \quad (4.5)$$

Tuttavia, poiché in questo caso in cui le osservazioni sono sostituite da ranghi, il massimo della varianza spiegata non è pari alla varianza totale ma a:

$$\bar{\sigma}_{\text{MAX}}^2 = \frac{n^3 - \sum_{i=1}^s n_i^3}{12n} \quad (4.6)$$

come indice dell'uguaglianza o differenza fra medie dei gruppi il seguente:

$$\delta = \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}_{\text{MAX}}^2} = \frac{\sum_{i=1}^s n_i \left(\bar{r}_i - \frac{n+1}{2} \right)^2}{n^3 - \sum_{i=1}^s n_i^3} = \frac{\frac{n+1}{12} \frac{g}{n^2-1}}{\frac{n+1}{12} \frac{g_{\text{MAX}}}{n^2-1}} = \frac{g}{g_{\text{MAX}}} \quad (4.7)$$

risulta più adeguato di η^2 .

Nella Tabella 3 si osserva che i valori dell'indice η^2 e soprattutto dell'indice δ per cui si accetta l'ipotesi nulla sono molto fluttuanti e in certi casi elevatissimi. In particolare risultano tanto più elevati quanto meno sono elevati s e n , e quanto più sono di ugual ampiezza i campioni. Infatti al decrescere di n (e a parità di n al decrescere di s e al crescere dell'uguaglianza dell'ampiezza dei campioni) diminuisce sia il numero di permutazioni indipendenti che il numero di determina-

zioni differenti di G , e perciò i valori massimi di G per cui si accetta l'ipotesi nulla sono più prossimi a g_{MAX} .

Quando i valori massimi di δ validi per l'accettazione dell'ipotesi nulla sono molto elevati diventa dubbio il valore probatorio del test anche perché, a differenza del caso parametrico, data l'assenza di elementi casuali di disturbo, l'ipotesi nulla di uguaglianza delle medie si verifica propriamente solo se $\delta = 0$.

Quanto prima detto mette in luce che se si utilizza in luogo della funzione g il rapporto tra g e g_{MAX} , si è molto più consapevoli dell'effettiva uguaglianza o differenza fra medie dei singoli gruppi; inoltre quando n è piccolo risulta opportuno adottare un livello di significatività α più alto in modo che i valori massimi di δ per cui si accetta l'ipotesi nulla siano meno elevati.

Il modo più opportuno per ovviare al problema mostrato è, però, quello di sostituire al test di Kruskal-Wallis, almeno nei casi in cui i valori massimi di δ per cui si accetta l'ipotesi H_0 sono troppo elevati, un nuovo test concepito nel modo seguente.

In luogo di scegliere nelle s popolazioni un solo insieme di s campioni di ampiezza $n_1, \dots, n_s$, si sceglie dapprima un primo insieme di s campioni di ampiezza $n_1, n_2, \dots, n_s$, quindi un secondo insieme di s campioni di ampiezza $n_1, \dots, n_s$, e così via fino a scegliere un w -esimo insieme di s campioni di ampiezza $n_1, \dots, n_s$. Si calcola quindi per ognuno dei w insiemi di s campioni la funzione δ_v (4.7); e infine si fa la media di tali w funzioni δ_v . Si ottiene così la seguente grandezza:

$$\lambda = \sum_{v=1}^w \frac{\delta_v}{w} = \frac{g_v / g_{\text{MAX}}}{w} = \frac{\frac{w}{\sum_{i=1}^s n_i} \left[\bar{r}_w - \frac{n+1}{2} \right]^2}{\frac{w}{n^3 - \sum_{i=1}^s n_i^3}} = \frac{w}{n^3 - \sum_{i=1}^s n_i^3} \quad (4.8)$$

Si nota che la funzione λ può essere interpretata anche come rapporto tra la sommatoria delle $w \delta_v$ e il suo massimo $w (n^3 - \sum_{i=1}^s n_i^3)$:

$$\lambda = \frac{\sum_{v=1}^w \delta_v}{\max \left(\sum_{v=1}^w \delta_v \right)} = \frac{\sum_{v=1}^w 12 \sum_{i=1}^s n_i \left[\bar{r}_w - \frac{n+1}{2} \right]^2}{w (n^3 - \sum_{i=1}^s n_i^3)} \quad (4.9)$$

Ognuna delle w funzioni δ_v si distribuisce come una v.c. D_v rapporto tra la v.c. G di Kruskal-Wallis e il suo massimo; perciò la media campionaria Λ dei valori assunti dalle v.c. $D_1, D_2, \dots, D_v$ tra loro indipendenti di uguale distribuzione si distribuisce come una v.c. Λ media campionaria di valore atteso pari al valore atteso di ogni D_v e tale che per il teorema centrale limite per $n \rightarrow \infty$ tende alla distribuzione di una v.c. normale.

Quando i valori massimi di D_v che portano all'accettazione dell'ipotesi nulla sono elevati, risulta molto più ragionevole verificare l'ipotesi di uguaglianza fra mediane utilizzando w campioni di ampiezza $n_1, n_2, \dots, n_s$ (per un'ampiezza complessiva del campione pari a $n = w(n_1 + n_2 + \dots + n_s)$) piuttosto che un unico campione di ampiezza $n = wn_1 + wn_2 + \dots + wn_s$. In altre parole è preferibile in questi casi ricorrere alla funzione λ (4.9) piuttosto che alla funzione δ (4.7), per due ragioni.

Innanzitutto si è già accennato il fatto che, all'aumento dell'ampiezza campionaria n , è assai problematico per problemi di costo, tempo e capacità del calcolatore costruire la distribuzione della v.c. G ; d'altra parte anche per n abbastanza elevato la distribuzione della v.c. è approssimata in modo non adeguato dalla distribuzione del χ^2 . Infatti, ad esempio, interpolando le probabilità retrocumulate della v.c. G mediante le probabilità retrocumulate della v.c. χ^2 ancora per $n = 20$ ($n_i = 2, s = 10$) si ottiene un coefficiente di correlazione pari solo a 0.8238.

In secondo luogo ciò che importa, in realtà, non è tanto la distribuzione di G , di D_v e di Λ per n che diverge, quanto per n piccolo, perché è proprio per n piccolo che le distribuzioni di G e di D_v si dimostrano particolarmente inadeguate a verificare l'ipotesi di uguaglianza fra le mediane.

Si osserva in quest'ottica che il numero di insiemi di s campioni da utilizzare per ovviare ai problemi descritti può essere assai limitato anche qualora n sia molto piccolo. Infatti, come si evince dalla Tabella 4, già per $w = 2$ aumentando le permutazioni indipendenti ed essendo perciò in numero maggiore i valori di Λ rispetto a quelli di G e di D_v , i valori massimi di Λ per cui si accetta l'ipotesi nulla sono molto inferiori ai valori massimi di D_v che permettono di accettare tale ipotesi quando $w = 1$.

Si osserva infine che il test (4.9) è monotono sia qualora si considerino w insiemi rispettivamente di n e $n + 1$ campioni sia qualora

si considerino $m - 1$ e m ($m \leq w$) insiemi di s campioni. Nel primo caso si ha infatti:

$$12 \frac{\sum_{v=1}^w \sum_{i=1}^q n_i \left[\bar{r}_{iv} - \frac{n+1}{2} \right]^2}{w \left(n^3 - \sum_{i=1}^q n_i^3 \right)} < 12 \frac{\sum_{v=1}^{w-1} \sum_{i=1}^q n_i \left[\bar{r}_{iv} - \frac{n+1}{2} \right]^2}{w \left(n^3 - \sum_{i=1}^q n_i^3 \right)} \quad (4.10)$$

in quanto il numeratore dell'indice relativo a $q + 1$ campioni è più grande e il denominatore più piccolo di quello relativo a q campioni.

Nel secondo caso interpretando λ come rapporto tra $\sum_{v=1}^w \delta_v$ e il suo massimo teorico, fisso, qualunque sia il numero di insiemi di campioni utilizzato, si ha:

$$12 \frac{\sum_{v=1}^{m-1} \sum_{i=1}^s n_i \left[\bar{r}_{iv} - \frac{n+1}{2} \right]^2}{w \left(n^3 - \sum_{i=1}^s n_i^3 \right)} < 12 \frac{\sum_{v=1}^m \sum_{i=1}^s n_i \left[\bar{r}_{iv} - \frac{n+1}{2} \right]^2}{w \left(n^3 - \sum_{i=1}^s n_i^3 \right)} \quad (4.11)$$

facilmente verificato per le stesse ragioni per cui è verificata la (4.10).

Tabella 1 - Interpolazione delle probabilità retrocumulate della variabile casuale G di Kruskal-Wallis mediante la funzione $e^{a+bG+cG^2+dG}$, con a , Valore dei parametri e del coefficiente di correlazione lineare.

n, s	a	b	c	d	coeff. corr. lin.
2×3	0.0003	-0.277	-0.0334	0.0233	0.9926
2×4	-0.028	0.0123	-0.0782	-0.0451	0.9986
2×5	-0.0119	0.0236	-0.0515	-0.0212	0.9996
2×6	-0.01796	0.0443	-0.038	-0.01168	0.9956
2×7	-0.04214	0.06902	-0.03097	-0.00395	0.9989
2×8	-0.08733	0.1155	-0.02841	0.000636	0.99818
2×9	-0.08072	0.1024	-0.02292	0.00464	0.99853
2×10	-0.09447	0.09419	-0.01863	0.00383	0.99798
3×2	0.0468	-1.0024	0.1108	0.0567	0.99997
3×3	0.00748	-0.3132	-0.04390	-0.0365	0.99931
3×4	0.02723	-0.1602	-0.04017	-0.0102	0.99983
3×5	0.02017	-0.06456	-0.03478	-0.0000341	0.99990
3×6	0.002526	-0.005311	-0.03032	0.00148	0.99997

Tabella 2 - Valore di $g_{\text{MAX}-1}$ e $g_{\text{MAX}-2}$ delle frequenze ad esse associate in distribuzioni con n_i di ugual ampiezza.

$n_i (s=3)$	$g_{\text{MAX}-1}$	$f_{\text{MAX}-1}$	$g_{\text{MAX}-2}$	$f_{\text{MAX}-2}$
2 x 3	3.714286	2	3.428571	2
2 x 4	6.166667	3	6	3
2 x 5	8.4	4	8.290909	4
2 x 6	10.53846	5	10.46154	5
2 x 7	12.62857	6	12.57143	6
2 x 8	8.4	4	8.290909	4
2 x 9	10.53846	5	10.46154	5
2 x 10	12.62857	6	12.57143	6
3 x 2	14.69118	7	14.64706	7
3 x 3	12.57143	6	16.70	8
3 x 4	14.69118	7	14.64706	7
3 x 5	16.74	8	16.70	8
3 x 6	18.77	9	18.74	9
4 x 2	2.333333	1	1.190476	2
4 x 3	6.489	2	5.956	4
4 x 4	9.974	3	9.667	6
4 x 5	13.233	4	13.033	8
4 x 6	16.392	5	16.251	10
5 x 2	4.083333	1	3	2
5 x 3	9.269231	2	8.769231	4
5 x 4	13.78676	3	13.5	6
5 x 5	17.0909	1	4.810909	2
6 x 2	12.02	2	11.58	4
6 x 3	7.410256	1	6.564103	2
7 x 2	9.016327	1	8.265306	2
8 x 2	11.29412	1	10.59926	2

Tabella 3 - Valori di accettazione dell'ipotesi nulla di g , η^2 , δ per $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.10$, (in caso di assenza del valore in corrispondenza dell' α prefissato si considera il valore più vicino nella distribuzione).

n_i, s	$1-\alpha$	g	η^2	δ
2 x 3	0.933	3.714	0.7429	0.8126
2 x 4	0.887	5.333	0.7619	0.8000
	0.961	6.000	0.8571	0.9000
2 x 5	0.990	6.167	0.8810	0.9250
	0.909	6.873	0.7636	0.7875
	0.951	7.309	0.8121	0.8375
2 x 6	0.904	8.073	0.8970	0.9250
	0.950	8.077	0.7343	0.7500
		8.769	0.7972	0.8143

n_i, s	a	b	c	d	coeff. corr. lin.
4 x 2	-0.0132	-1.164	0.132	0.174	0.99952
4 x 3	0.006752	-0.3993	-0.02422	-0.00816	0.99985
4 x 4	0.03167	-0.2045	-0.03041	0.00366	0.99988
5 x 2	-0.0422	-1.0683	0.0799	0.0934	0.9973
5 x 3	0.00553	-0.413	-0.0169	-0.00453	0.99993
6 x 2	-0.0607	-1.0478	0.0676	0.0542	0.9971
7 x 2	-0.0792	-1.0607	0.0655	0.0646	0.9966
8 x 2	-0.0786	-1.1128	0.0694	0.0952	0.9967
$n_i (s=3)$	a	b	c	d	coeff. corr. lin.
1 1 2	0.0010857	0.0014841	-0.1115	0.10059	1.0000
1 1 3	0.92542	-2.4020	0.5592	0.72699	1.0000
1 1 4	0.053897	-0.29393	-0.032722	0.077013	0.9900
1 1 5	0.048098	-0.25231	-0.055886	0.044956	0.99020
1 2 2	0.0017021	-0.21839	-0.055085	0.069907	0.99929
1 2 3	0.031137	-0.36132	-0.023389	0.087010	0.99628
1 2 4	0.0041302	-0.29710	-0.055923	0.056822	0.99754
1 2 5	0.0098602	-0.33781	-0.047278	0.071117	0.99768
1 3 3	0.018637	-0.26686	-0.062316	0.027776	0.99459
1 3 4	0.018243	-0.32502	-0.055435	0.052547	0.99777
1 3 5	0.016566	-0.34411	-0.049455	0.052664	0.99855
1 4 4	0.012367	-0.32323	-0.055807	0.049640	0.99911
1 4 5	0.013738	-0.34362	-0.052595	0.046465	0.99924
1 5 5	0.010803	-0.33848	-0.052275	0.043794	0.99930
2 2 2	0.00030	-0.27700	-0.033400	0.023300	0.99260
2 2 3	-0.00968	-0.32696	-0.033036	-0.0017151	0.99585
2 2 4	-0.01335	-0.32494	-0.037904	0.0056795	0.99852
2 2 5	-0.01136	-0.35612	-0.031155	0.0097965	0.99833
2 3 3	-0.00227	-0.31784	-0.042906	-0.023595	0.99819
2 3 4	-0.01065	-0.35552	-0.034483	-0.0072342	0.99935
2 3 5	-0.01108	-0.35617	-0.035220	-0.0084424	0.99947
2 4 4	-0.00683	-0.35996	-0.033662	-0.0073070	0.99947
2 4 5	-0.01312	-0.36925	-0.032596	-0.0073560	0.99966
2 5 5	-0.00802	-0.37688	-0.030476	-0.0049743	0.99970
3 3 3	0.00748	-0.31324	-0.043898	-0.036522	0.99931
3 3 4	-0.00071	-0.36761	-0.032910	-0.020032	0.99959
3 3 5	-0.00058	-0.37787	-0.030508	-0.017998	0.99975
3 4 4	-0.00033	-0.39353	-0.026492	-0.012957	0.99981
3 4 5	-0.00206	-0.40266	-0.024757	-0.011972	0.99985
3 5 5	-0.00224	-0.41114	-0.022020	-0.0080313	0.99977
4 4 4	0.00675	-0.39929	-0.024222	-0.0081606	0.99985
4 4 5	0.00008	-0.41952	-0.020221	-0.0062328	0.99992
4 5 5	0.00109	-0.42681	-0.018554	-0.0058246	0.99991
5 5 5	0.00553	-0.43094	-0.016946	-0.0045283	0.99993

$n_i \cdot s$	$1-\alpha$	g	η^2	δ
2×7	0.991 0.902	9.769 9.314 10.114	0.8881 0.7165 0.7780	0.9072 0.7277 0.7902
2×8	0.991	11.314 10.632 11.515 12.838	0.8703 0.7088 0.7676 0.8559	0.8839 0.7172 0.7768 0.8660
2×9	0.902 0.951	11.825 12.772 14.281	0.6956 0.7513 0.8400	0.7021 0.7583 0.8479
2×10		12.971 14.028 15.685	0.6827 0.7383 0.8256	0.6879 0.7439 0.8318
3×2 3×3	0.900	2.333 4.356 4.356	0.4610 0.5450 0.5450	0.6000 0.6050 0.6050
3×4	0.989 0.902	5.956 5.974 6.846	0.7450 0.5420 0.6215	0.8270 0.5742 0.6584
3×5	0.989	8.333 7.300 6.846	0.7570 0.5214 0.6215	0.8019 0.5407 0.6584
3×6	0.989 0.902	8.333 8.626 0.749	0.7570 0.5069 0.5730	0.8019 0.5198 0.5876
4×2	0.886 0.943 0.971	11.784 2.083 3.000	0.6929 0.2980 0.4290	0.7105 0.3910 0.5630
4×3	0.903 0.951 0.981	4.083 4.500 5.654	0.5830 0.4090 0.5140	0.7660 0.4570 0.5740
4×4	0.901 0.951	7.423 6.066 7.213	0.6750 0.4044 0.4899	0.7540 0.4297 0.5109
$n_i(s=3)$	$1-\alpha$	g	η^2	δ
1 1 5	0.857	2.829	0.4480	0.7140
1 2 2	0.800	3.000	0.7500	0.8333
1 2 3	0.900	3.857	0.7670	0.8980
1 2 4	0.886	3.750	0.6250	0.7780
1 2 5	0.943 0.900 0.952	4.500 4.050 4.450	0.7500 0.5755 0.6331	0.9330 0.7692 0.8462

$n_i(s=3)$	$1-\alpha$	g	η^2	δ
1 3 3		4.000	0.6670	0.7780
1 3 4	0.907	4.571 3.889 5.000	0.7620 3.2840 4.2370	0.8890 0.6630 0.8560
1 3 5	0.979 0.902 0.948 0.988	5.389 3.840 4.711 6.044	4.5700 0.4800 0.5889 0.7555	0.9230 0.600 0.7361 0.9444
1 4 4		3.900 4.867 6.167	0.4880 0.6080 0.7710	0.5850 0.7300 0.9250
1 4 5		3.960 4.833 6.818	0.4380 0.5350 0.7570	0.5360 0.6550 0.9260
1 5 5		3.927 6.818 3.714	0.392 0.7570 0.7430	0.4800 0.9260 0.8130
2 2 2 2 2 3	0.933 0.895 0.952 0.971	3.929 4.500 4.714 4.167	0.6550 0.7500 0.7860 0.5950	0.7330 0.8400 0.8800 0.6950
2 2 4	0.948 0.986 0.900 0.984 0.992	4.500 5.500 4.293 4.893 6.133	0.6430 0.7960 0.5370 0.6120 0.7670	0.7500 0.9170 0.6570 0.7490 0.9390
2 2 5		4.556 5.000 5.556	0.6490 0.7130 0.7930	0.7280 0.7990 0.8880
2 3 3		4.444 5.378 6.144	0.5555 0.6723 0.7680	0.6349 0.7683 0.8777
2 3 4	0.902 0.949 0.989 0.898 0.951	4.378 5.106 6.818 4.446 5.127	0.4860 0.5670 0.7570 0.4940 0.5700	0.5730 0.6680 0.8930 0.5660 0.6530
2 3 5		6.627	0.7360	0.8440
2 4 4	0.902 0.949	4.518 5.254	0.4518 0.5254	0.5259 0.6116
2 4 5	0.949 0.949 0.990 0.950 0.990 0.943	5.238 7.208 5.573 6.709 5.503	0.4758 0.6550 0.6185 0.7449 0.5503	0.5555 0.7647 0.6944 0.8364 0.6306

$n_i(s=3)$	$1-\alpha$	g	η^2	δ
3 4 4	0.989	6.881	0.6861	0.7862
	0.951	5.576	0.5576	0.6259
	0.990	7.136	0.7136	0.8010
3 4 5	0.950	5.619	0.5104	0.5793
	0.990	7.395	0.6720	0.7628
3 5 5	0.949	5.600	0.4670	0.5310
	0.990	7.437	0.6200	0.7050
4 4 5	.950	5.571	0.4630	0.5216
	0.989	7.714	0.6428	0.7222
4 5 5	0.950	5.820	0.4320	0.5216
	0.900	7.720	0.5737	0.6670

Tabella 4 - Valori di accettazione dell'ipotesi nulla di λ , per $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.10$ per alcuni casi con $w = 2$.

$n_i \cdot s$	P_b	λ
2×3	0.942	0.781
	0.8821	0.6872
2×4	0.961	0.775
	0.99	0.862
2×5	0.908	0.675
	0.910	0.759
3×2	0.990	0.813
	0.88	0.3085
3×3	0.899	0.5
	0.949	0.574
4×2	0.989	0.716
	0.8775	0.3906
5×2	0.941	0.507
	0.972	0.5703
	0.905	0.328
	0.945	0.411
	0.989	0.584
$n_i(s=3)$	P_b	λ
1 1 5	0.835	0.722
1 2 2	0.783	0.75
1 2 3	0.908	0.7722
1 2 4	0.8857	0.6612
1 2 5	0.9405	0.7446
	0.902	0.631
	0.951	0.708

$n_i(s=3)$	P_b	λ
1 3 3	0.902	0.652
	0.952	0.7222
1 3 4	0.906	0.594
	0.949	0.6703
1 3 5	0.979	0.7596
	0.902	0.534
1 4 4	0.949	0.605
	0.988	0.724
1 4 5	0.898	0.507
	0.951	0.585
1 5 5	0.99	0.714
	0.902	0.471
2 2 2	0.944	0.53
	0.989	0.668
2 2 3	0.895	0.411
	0.947	0.48
2 2 4	0.989	0.607
	0.943	0.781
2 2 5	0.894	0.626
	0.951	0.73
2 3 3	0.97	0.776
	0.9	0.579
2 3 4	0.947	0.659
	0.986	0.77
2 3 5	0.91	0.552
	0.944	0.602
2 3 6	0.992	0.7857
	0.907	0.573
2 3 7	0.939	0.626
	0.989	0.7866

Riferimenti bibliografici

C.H. KRAFT, C. VAN EEDEN (1968), *A non-parametric introduction to statistics*, New York, McMillan.
W.H. KRUSKAL, W.A. WALLIS (1952), *Use of ranks in one criterion variance analysis*, Journal American statistical Association, 47, 583-621.
W.H. KRUSKAL (1952), *A non-parametric test for the several sample problem*, Ann. Math. Statist., 23, 525-540.
G. LANDENNA, D. MARASINI (1990), *Metodi statistici non parametrici*, Bologna, Il Mulino.
A.M. MOOD, F.A. GRAYBILL, D.C. BOES (1974), *Introduction to the theory of statistics*, McGraw Hill.